岩野・渋谷理論の展開(微分方程式の数式処理システムの研究)

大河内, 茂美

数理解析研究所講究録
681巻 1989年 140-148

岩野・渋谷理論の展開

大分大工　　大河内　茂美
(Shigemi Ohkohchi)

1. 60年代

岩野・渋谷の論文で、変わり点問題の一般的な取扱方が提出された。ここで、変わり点問題とは、次のような方程式で、

$$\varepsilon^2 y'' = p(x, \varepsilon) y \tag{1}$$

P(x,0)の零点が変わり点と呼ばれ、そのような零点の近傍で $\varepsilon \to 0$とした時に、解がどのように振舞うかを調べようとするものである。基本的には、1次元シュレディンガー方程式でのトンネル効果の解明を目的とした研究課題である。古くは、Langerの研究があり、量子力学の本にもよく記述されているが、それがもっと一般の場合にはどうなっているかを歴史的に考えてみる。岩野・渋谷論文では、より一般な方程式で論じられているが、ここでは2階の方程式での話に限定しておく。変わり点は原点で考える。
P(x, ε)は、次の漸近展開をもつとしておく。

$$p(x, \varepsilon) \simeq \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k p_k(x) \tag{2}$$

$$p_k(x) = \sum_{h=0}^{\infty} x^h p_{kh}, \qquad p_0(x) = x^q$$

$$p_{kh} = 0 \quad (h < m_k), \qquad p_{kh} \neq 0 \quad (h = m_k)$$

$R=(1,-1)$, $P_0=(0,q)$, $P_1=(1/2, m_1/2)$ を平面上にプロットする。線分P_0R とP_1 の位置関係を問題にする。

（Ａ）　P_1 は P_0R より上にある

（Ｂ）　P_1 は P_0R より上にある

（Ｃ）　P_1 は P_0R より上にある

Wasowの定義に従えば、（Ａ）（Ｂ）は fully reducible （Ｃ）は partially reducible と呼ばれるが、ここでは fully reducible を２つに分けておく。これら３つの場合に違いを、具体例で説明しておく。

（Ａ）の場合;

$$\varepsilon^2 y'' = xy$$

（Ｂ）の場合;

$$\varepsilon^2 y'' = (x^2+\varepsilon)y$$

（Ｃ）の場合;

$$\varepsilon^2 y'' = (x^3-\varepsilon)y$$

（Ａ）の場合には、$x=\varepsilon^{2/3}t$ （ストレッチング変換; $X=0$の近傍は、ｔ平面では平面全体に拡大される）を実行すると、

$$\frac{d^2y}{dt^2} = ty$$

（Ｂ）の場合には、 $x=\varepsilon^{1/2}t$ により

$$\frac{d^2y}{dt^2} = (t^2+1)y$$

が得られる。

これらは、ともに、よく知られた方程式であり、特殊関数として認められたものであるので、解の接続についてもよくわかっている。一方、（Ｂ）の場合には、次の各領域で、変換が実行される。（領域と変換は、P_0P_1Rの折れ線の傾きから決定される）

(C-1) $\quad M_1|\varepsilon|^{1/3} \leq |x| \leq \delta_0$

$$(x^{-3}\varepsilon)x^{3/2}\frac{dZ}{dx} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (x^{-3}\varepsilon)\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2}x^{1/2} \end{pmatrix}\right]Z$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/2} \end{pmatrix}Z$$

(C-2) $\quad M_2|\varepsilon|^{1/2} \leq |x| \leq M_1|\varepsilon|^{1/3}$

$$\varepsilon^{1/6}\frac{dU}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ t^3-1 & 0 \end{pmatrix}U$$

$$t = x\varepsilon^{-1/3}$$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{1/2} \end{pmatrix}U$$

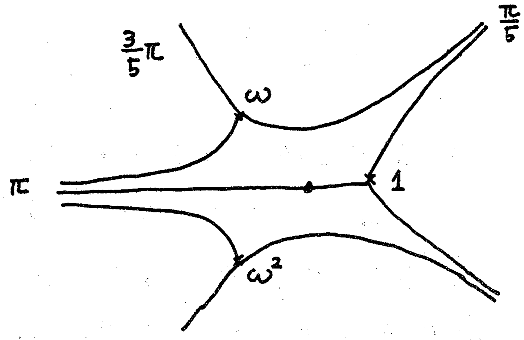
(C-3)　　$|x|\leq M_2|\varepsilon|^{1/2}$

$$\frac{dV}{ds}=\left[\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}+\varepsilon^{1/2}\begin{pmatrix}0 & 0\\ s^3 & 0\end{pmatrix}\right]V$$

$$s=\varepsilon^{-1/2}x$$

$$Y=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & \varepsilon^{1/2}\end{pmatrix}V$$

ここで(c-1)(c-3)はそれぞれ外部解、内部解を与える方程式であるが、それらの解の接続を考えるためには、(3-2)との接続を求めなければならない。ところが、(c-2)は、$t=1$, ω, ω^3という３つの変わり点をもつ方程式である。
このような変わり点は、secondary turning pointと呼ばれて、partially reducible の場合には、現われてくるものである。turning pointは、今の場合には、３つに増えたのであるが、これらは、$t^3=1$の単根であることに注意して、$t=1, \omega, \omega^3$の各点の近傍で(c-2)を考えると、実は、fully reducibleになっていることがわかる。つまり、secondary turning pointの近傍では、外部解と内部解を与える方程式に変換できるということである。(Ａ)(Ｂ)では、簡単な例を示したが、一般には、外部解と内部解を与える２つの方程式が与えられるのみで(c-2)のようなことは決しておこらない場合である。
(Ｃ)の場合には、次のストークス曲線に注意しながら、各領域での解を隣あう領域に接続していけばよいことになる。



2. 70年代

上記の研究により、(1)の問題は、原理的には解決できるのであるが、WKB解との関係でみたときには、これでは充分ではない。
というのは、WKB解と外部解とは、ほとんど同一のものであるが、それが turning point を通過することにより、どのような WKB解に変化するのかを知りたいのであるが、そのためには外部解ごとの接続を考えなければならない。
それらの関係をうまく見通せるようにするために、まず(1)の方程式をできるだけ簡単な方程式に変換する。つまり、従属変数の変換により(1)は次の方程式に変換できる。大久保等による研究結果である。ただし、この変換は、εべきの形式的べき級数である。

$$\varepsilon^2 z'' = (x^q + \sum_{k=0}^{q-2} a_k(\varepsilon) x^k)z \tag{4}$$

これにストレッチング変換を行うと、

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = (t^q + \sum_{k=0}^{q-2} \hat{a}_k(\varepsilon) t^k)z \tag{5}$$

が得られるが、fully reducible の場合には、ここでの係数 $\hat{a}_k(\varepsilon)$は $\varepsilon \to 0$ で有界であり、特に(A)の場合には $\hat{a}_k(\varepsilon) \to 0$でもある。
これから、(5)で考えれば、外部解と内部解との接続は、不確定特異点 $t=\infty$ と正則点 $t=0$ の接続であり、(5)の形から比較的容易である。従って、(1)を(4)に変換するのが解析的変換である必要があるが、その変換を決定する際に(5)の解を用

いるのであるが、(5)の解は角領域に依存して決まっているので、(1)から(4)への変換が角領域に dependする解析的変換となってしまう。このことは、外部解ごとの接続つまりWKB解の接続を調べるためには、角領域に dependしない解析的変換でなければならないが、渋谷は$\hat{a}_b(\varepsilon)$の解への依存性を調べてこの点を解決した。
そのときには、fully reducible で(A)の場合、(5)はAiry関数($\varepsilon \to 0$で)を用いて表わせる点に注意して解決した。
この手法は一様簡略化という名称で呼ばれるものであるが、
この解決をまって Leung は

$$y'' - \lambda^2 p(x) y = 0$$
$$y \in L^2(-\infty, +\infty)$$

の形の固有値問題を考え、p(x)が零点をもつ場合に、物理的意味がある解が存在するためには、λ(十分大)は漸近的にどの様な条件を満たすべきか論じ、ボーアの量子化条件を導き出している。

3. 80年代

一様簡略化が fully reducible(B)について可能であることがわかればどうなるかを考えると、岩野・渋谷折れ線でpartially reducibleの場合にもsecondary turning pointが現われるが、何回かのプロセスで secondary turning pointはすべて fully reducibleとなるから、一様簡略化とは fully reducibleな場合に可能であることが分かっていればよい。
(A)(B)が(5)の式でどうちがうかを考えると、(A)では $\varepsilon \to 0$

で(5)が Airy方程式となったのが(B)では、

$$(6) \qquad y'' = (t^{2m} + bt^{m-1})y$$

の形になる。((B)ではqが偶数の場合に限られるので、2mで表わしている。また、bは0とは限らない定数である)
注意しておかなければならないのは、m = 1のときにはウェバー方程式であるので、この場合には渋谷の論文でも一様簡略化が可能であることは示されている。一様簡略化が可能であるかどうかは(6)の解の大域的性質を決定できるかどうかに関係しているので、(6)について論じると(6)は $t=\infty$ を不確定特異点とするので、正の実軸上、subdominantな解をy(t)で表わし、そのメリン変換を

$$F(s) = \int_0^\infty t^{s-1} y(t)\,dt$$

で表わすと、F(s)は次の差分方程式の解であることが分かる。

$$s(s+1)F(s) - F(s+2m+2) - b\circ F(s+m+1) = 0$$

F(s)にΓ関数を作用させておけば、つまり、$F(s)=F((m+1)t) = \Gamma(t)W(t)$とおけば、

$$(t+1)W(t+2) + b\circ W(t+1) - [(m+1)^2 t + (m+1)]W(t) = 0$$

となる。
これは、差分方程式のクラスの中で超幾何型差分方程式と呼ばれるものである。また、それらの解もよく知られているから、この2つの解を h_1, h_2 で表わすとき、W(t)は $p_1(t)$, $p_2(t)$を係数とする h_1, h_2 の一次結合で表わされる。ここに、$p_1(t)$, $p_2(t)$は周期関数である。tを整数値に限って、p_1, p_2 を定数とみなして h_1, $h_2(s)$の漸近展開と y(t)の不確定特異

点 $t=\infty$ での漸近展開よりメリン変換を通して定まる漸近展開とから、p_1 p_2を決定できる。
この結果として、F(s)の s=0, -1における留数計算を実行すれば、その値は y(0), y'(0)の値に他ならない。実際、次の値で与えられる

$$y(0,a)=2^{\frac{m+a}{2m+2}}(m+1)^{-\frac{m+a}{2m+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{m+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+m+2}{2m+2}\right)}$$

$$y'(0,a)=2^{\frac{a+m+2}{2m+2}}(m+1)^{-1-\frac{a+m}{2m+2}}\frac{\Gamma\left(\frac{-1}{m+1}\right)}{\Gamma\left(\frac{a+m}{2m+2}\right)}$$

これより、多少、大変な計算量が伴うが、(B)の場合には一様簡略化が可能になると思われる。
最後に、方程式(1)で変わり点での解の接続にこだわってきたが、特異摂動の問題において、内部に変わり点をもつ場合を考えると、

$$\varepsilon y''+f(x,\varepsilon)y'+g(x,\varepsilon)y=0 \qquad -1<x<1$$

f(x,0)の零点が変わり点であるが、そのような場合には resonanceと呼ばれる解が存在することがある。
f(x,0)≠0 の場合には、x=1 または -1に境界層が現われることはよく知られているが、さらに、予期せぬことであったが、境界層をもたない解つまり極限解に一様収束する解が現われることがある。
そのような際に resonance現象と呼ばれるのであるが、どの様な条件のもとで、そのような現象がおこるかを決定するのは、応用上重要な課題であって、その条件は Matkowsky条件と呼ばれる予想がある。その十分性を示すのに、特異摂動の方程式を(1)の形の変わり点問題の形に変数変換によって書き直すと、fully reducibleであって(B)の場合に resonance

がおこり、そのことを解析的に示すに際しても、一様簡略化の手法が重要な役割を演じることになる。

参考文献

M.IWANO & Y.Sibuya: Reduction of the order of a linear ordinary differential equation containing a small parameter, Kodai Math. Sem. Reports 15 (1963) 1-28.

P.M.Batchelder: An introdution to linear difference equation. Dover 1967.

Y.Sibuya: Uniform Simplification in a full neighborhood of a transition point. Menoirs of the A.M.S. No149(1974).

A.Leung: Distribution of eigenvalues in the presence of higher order turning points. Trans. Amer. Math. Soc. 229(1977) 111-135.

S.Ohkohchi: An extention of Weber's equation. 投稿中.